Difusiones como límite de Caminatas Aleatorias en Tiempo Continuo

Autor: G. Beltritti

Universidad Nacional de Río Cuarto

Seminario Carlos Segovia Fernández
Santa Fe, 07 Octubre de 2016

Problema de convergencia

Problema de convergencia

$$(\mathrm{P})\begin{cases} T\,u\,(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u\,(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema de convergencia

$$(\mathrm{P}_r)\begin{cases} T_r u^r(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u^r(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema de convergencia

$$(\mathrm{P}_r)\left\{\begin{array}{lc} T_r u^r(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u^r(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

$$T_r \underset{r\to 0}{\to} -\frac{\partial}{\partial t} + \triangle$$

Problema de convergencia

$$(\mathrm{P}_r)\begin{cases} T_r u^r(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u^r(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$T_r \underset{r\to 0}{\to} -\frac{\partial}{\partial t} + \triangle$$

$$u_r \underset{r\to 0}{\to} v$$

Problema de convergencia

$$(\mathrm{P}_r)\begin{cases} T_r u^r(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u^r(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$T_r \underset{r\to 0}{\to} -\frac{\partial}{\partial t} + \triangle$$

$$u_r \underset{r\to 0}{\to} v$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) + \triangle v(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\triangle u(x) = 0$$

para todo $x \in D$. $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\triangle u(x) = 0$$

para todo $x \in D$. $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

$x_0 \in D$, $0 < r < d(x_0, \partial D)$

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} u(y) dy$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\triangle u(x) = 0$$

para todo $x \in D$. $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

$x_0 \in D$, $0 < r < d(x_0, \partial D)$

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} u(y) dy$$

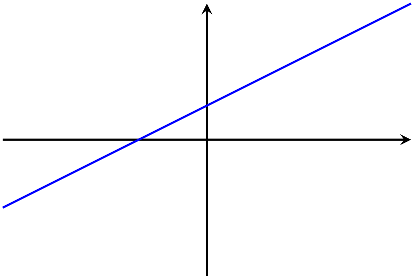
$$u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y) u(y) dy$$

$\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n} \varphi\left(\frac{x}{r}\right)$, φ radial, sop$\varphi \subset B(0,1)$, $\int \varphi(x) dx = 1$.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

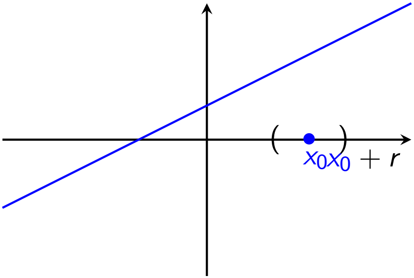
Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.



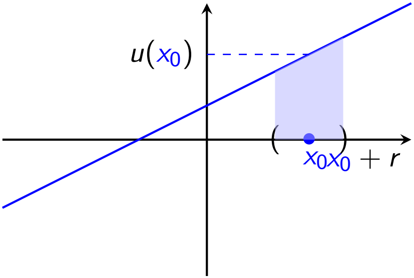
Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.



Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

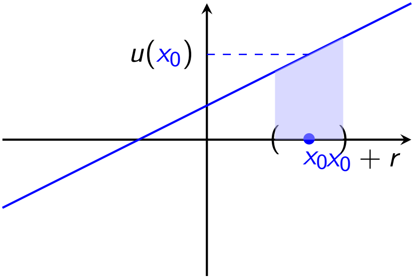
$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.

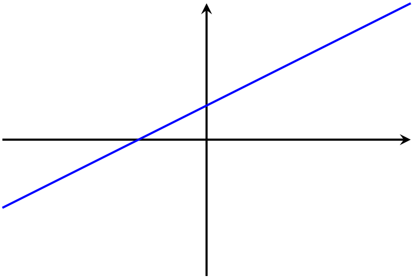


$$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} u(y) dy$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ ($\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$), $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.

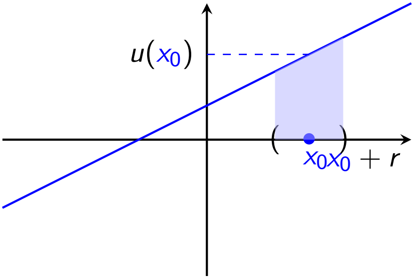


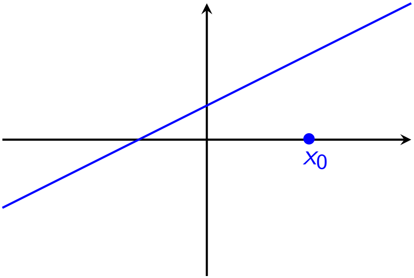


$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} u(y) dy$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.

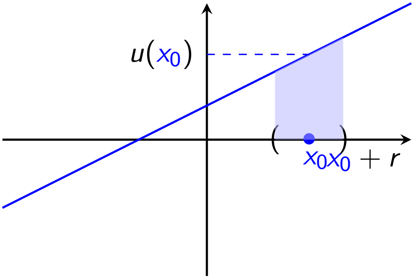




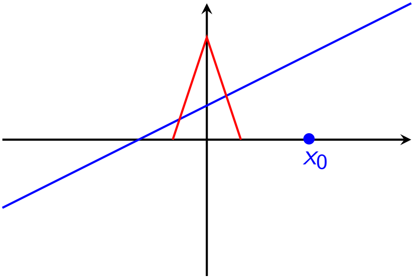
$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} u(y)dy$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.



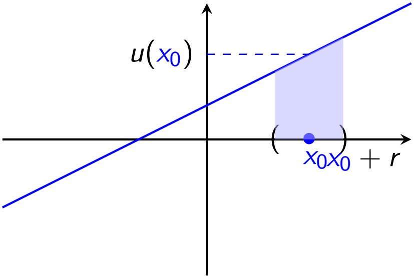
$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0-r}^{x_0+r} u(y)dy$

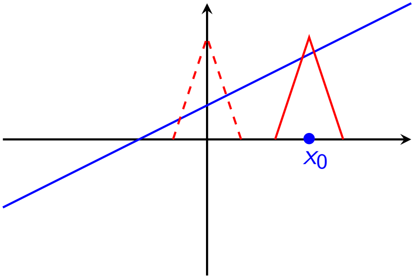


$\varphi(y)$ radial, sop$\varphi(y) \subset [-1, 1]$
$\int \varphi(y)dy = 1$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.





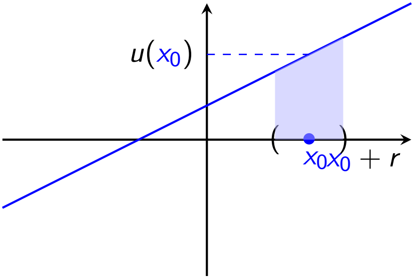
$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} u(y)dy$

$\varphi(y)$ radial, sop$\varphi(y) \subset [-1, 1]$
$\int \varphi(y)dy = 1$

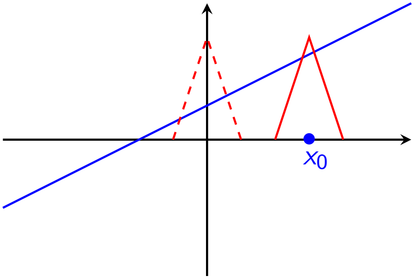
$\varphi(x_0 - y)$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.



$$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} u(y) dy$$



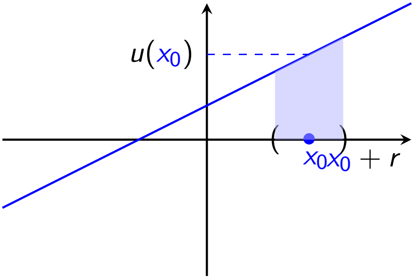
$\varphi(y)$ radial, sop$\varphi(y) \subset [-1, 1]$

$$\int \varphi(y) dy = 1$$

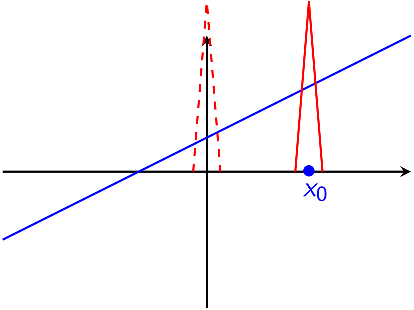
$$u(x_0) = \int \varphi(x_0 - y) u(y) dy$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ ($\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$), $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.



$$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0-r}^{x_0+r} u(y)dy$$

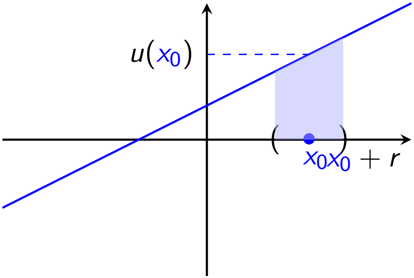


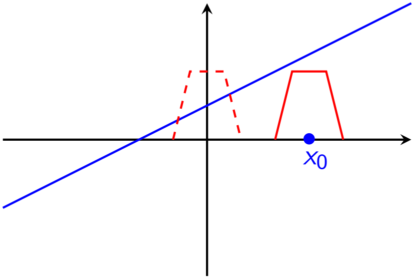
$\varphi_r(y)$ radial, sop$\varphi_r(y) \subset [-r, r]$
$\int \varphi_r(y)dy = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $(\triangle = \frac{d^2}{dx^2})$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u''(x) = 0$.





$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} u(y) dy$

$\psi(y)$ radial, sop$\psi(y) \subset [-1, 1]$
$\int \psi(y) dy = 1$

$u(x_0) = \int \psi(x_0 - y) u(y) dy$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Resultado

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Resultado

- $\triangle u = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^n$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Resultado

- $\triangle u = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in D$, $0 < r < d(x_0, \partial D)$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Resultado

- $\triangle u = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in D$, $0 < r < d(x_0, \partial D)$
- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, φ radial, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

Entonces

$$u(x_0) = \varphi_r * u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy.$$

Resultado

- $\triangle u = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in D$, $0 < r < d(x_0, \partial D)$
- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, φ radial, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

Entonces

$$u(x_0) = \varphi_r * u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy.$$

Además $u \in C^\infty(D)$.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Resultado

- $\triangle u = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^n$
- $x_0 \in D$, $0 < r < d(x_0, \partial D)$
- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, φ radial, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

Entonces

$$u(x_0) = \varphi_r * u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy.$$

Además $u \in C^\infty(D)$.

¿Vale la recíproca?

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Recíproca

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Recíproca

- $u \in C^{\infty}(D)$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Recíproca

- $u \in C^{\infty}(D)$
- $x_0 \in D$, $\forall\ 0 < r < d(x_0, \partial D)$, φ radial, sop$\varphi \subset B(0,1)$, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Recíproca

- $u \in C^\infty(D)$
- $x_0 \in D$, $\forall\ 0 < r < d(x_0, \partial D)$, φ radial, sop$\varphi \subset B(0,1)$, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$$

Recíproca

- $u \in C^\infty(D)$
- $x_0 \in D$, $\forall\ 0 < r < d(x_0, \partial D)$, φ radial, sop$\varphi \subset B(0,1)$, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$$

Entonces $\triangle u(x_0) = 0$.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

Recíproca

- $u \in C^\infty(D)$
- $x_0 \in D$, $\forall\ 0 < r < d(x_0, \partial D)$, φ radial, sop$\varphi \subset B(0,1)$, $\int \varphi(x)dx = 1$, $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$$

Entonces $\triangle u(x_0) = 0$.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. .

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. .

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

$$0 = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy - u(x_0)$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

$$\begin{aligned} 0 &= \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy - u(x_0) \\ &= \int \varphi_r(x_0 - y)(u(y) - u(x_0))dy \end{aligned}$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

$$\begin{aligned} 0 &= \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy - u(x_0) \\ &= \int \varphi_r(x_0 - y)(u(y) - u(x_0))dy \\ &= \int \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x_0 - y}{r}\right)(u(y) - u(x_0))dy \end{aligned}$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

$$\begin{aligned}
0 &= \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy - u(x_0) \\
&= \int \varphi_r(x_0 - y)(u(y) - u(x_0))dy \\
&= \int \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x_0 - y}{r}\right)(u(y) - u(x_0))dy \\
&= \int \varphi(z)(u(x_0 - rz) - u(x_0))dz
\end{aligned}$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

$$\begin{aligned}
0 &= \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy - u(x_0) \\
&= \int \varphi_r(x_0 - y)(u(y) - u(x_0))dy \\
&= \int \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x_0 - y}{r}\right)(u(y) - u(x_0))dy \\
&= \int \varphi(z)(u(x_0 - rz) - u(x_0))dz \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi(z)(u(x_0 - rz) - u(x_0))dz
\end{aligned}$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$n = 1$ $\triangle = \frac{d^2}{dx^2}$. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $u(x_0) = \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy$. ¿$u''(x_0) = 0$?.

$$\begin{aligned}
0 &= \int \varphi_r(x_0 - y)u(y)dy - u(x_0) \\
&= \int \varphi_r(x_0 - y)(u(y) - u(x_0))dy \\
&= \int \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x_0 - y}{r}\right)(u(y) - u(x_0))dy \\
&= \int \varphi(z)(u(x_0 - rz) - u(x_0))dz \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi(z)(u(x_0 - rz) - u(x_0))dz \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi(z)(u'(x_0)(-rz) + u''(x_0)r^2z^2 + u'''(x_0 + \xi_z)r^3z^3)dz
\end{aligned}$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$$0 = u'(x_0)(-r)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z\,dz + u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2\,dz + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3\,dz$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$$
\begin{aligned}
0 &= u'(x_0)(-r)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z\,dz + u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz \\
&\quad + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz \\
0 &= u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz
\end{aligned}
$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$$0 = u'(x_0)(-r)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z\,dz + u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz$$
$$+ r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz$$
$$0 = u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz$$

$$0 = u''(x_0)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$$0 = u'(x_0)(-r)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z\,dz + u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz$$
$$+ r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz$$
$$0 = u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz$$

$$0 = u''(x_0)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz$$

$$0 = u''(x_0)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + \lim_{r\to 0}\left[r\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz\right]$$

Fórmulas de valor medio para funciones armónicas

$$
\begin{aligned}
0 &= u'(x_0)(-r)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z\,dz + u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz \\
&\quad + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz \\
0 &= u''(x_0)r^2\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r^3\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz
\end{aligned}
$$

$$
0 = u''(x_0)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + r\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= u''(x_0)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz + \lim_{r\to 0}\left[r\int_{-1}^{1}\varphi(z)u'''(x_0+\xi_z)z^3dz\right] \\
&= u''(x_0)\int_{-1}^{1}\varphi(z)z^2dz
\end{aligned}
$$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, φ radial, sop$\varphi \subset [-1, 1]$ $\int \varphi(x)dx = 1$,
$\varphi_r(x) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, φ radial, sop$\varphi \subset [-1, 1]$ $\int \varphi(x)dx = 1$,
$\varphi_r(x) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$T_r : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, φ radial, sop$\varphi \subset [-1,1]$ $\int \varphi(x)dx = 1$,
$\varphi_r(x) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$T_r : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$$T_r w(x) = \frac{1}{r^2}\int \varphi_r(x-y)\left[w(y) - w(x)\right] dy$$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, φ radial, sop$\varphi \subset [-1,1]$ $\int \varphi(x)dx = 1$,
$\varphi_r(x) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$T_r : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$$T_r w(x) = \frac{1}{r^2}\int \varphi_r(x-y)\left[w(y) - w(x)\right] dy$$

$$T_r w(x) = w''(x)\int \varphi(z)z^2 dz + r\int \varphi(z) w'''(x+\xi_z) z^3 dz$$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, φ radial, sop$\varphi \subset [-1,1]$ $\int \varphi(x)dx = 1$,
$\varphi_r(x) = \frac{1}{r}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$

$$T_r : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$$T_r w(x) = \frac{1}{r^2} \int \varphi_r(x-y)\left[w(y) - w(x)\right] dy$$

$$T_r w(x) = w''(x) \int \varphi(z) z^2 dz + r \int \varphi(z) w'''(x+\xi_z) z^3 dz$$

$$\lim_{r \to 0} T_r w(x) = C(\varphi) w''(x)$$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Resultado

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- φ radial

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Resultado

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- φ radial
- sop$\varphi \subset B(0,1)$

Resultado

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- φ radial
- sop$\varphi \subset B(0,1)$
- $\int \varphi(x)dx = 1$

Convergencia de operadores no locales a $\triangle$

Resultado

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- φ radial
- sop$\varphi \subset B(0,1)$
- $\int \varphi(x)dx = 1$
- $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$.

Resultado

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- φ radial
- sop$\varphi \subset B(0,1)$
- $\int \varphi(x)dx = 1$
- $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$.

Sea $T_r : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$T_r w(x) = \frac{1}{r^2}\int \varphi_r(x-y)\left[w(y) - w(x)\right] dy.$$

Resultado

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- φ radial
- sop$\varphi \subset B(0,1)$
- $\int \varphi(x)dx = 1$
- $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$.

Sea $T_r : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$T_r w(x) = \frac{1}{r^2}\int \varphi_r(x-y)\left[w(y) - w(x)\right]dy.$$

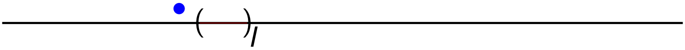
Entonces

$$T_r \underset{r\to 0}{\to} C(\varphi)\triangle$$

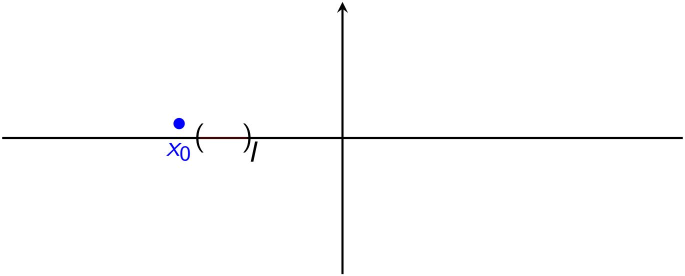
Ecuaciones no locales

Ecuaciones no locales

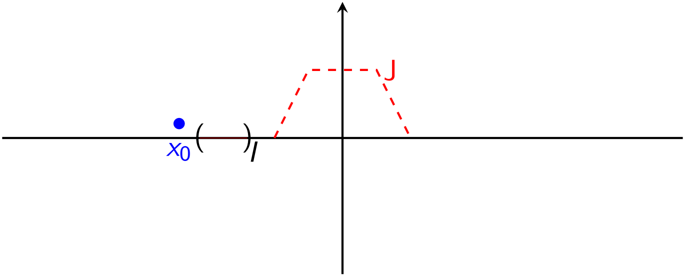
Ecuaciones no locales

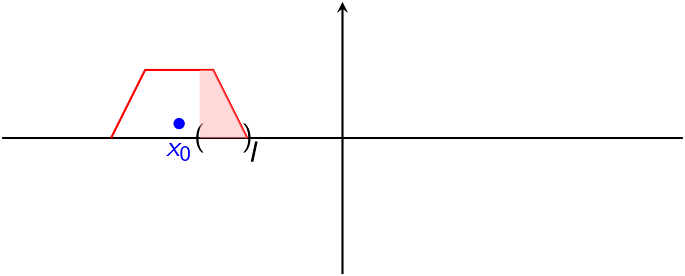


Ecuaciones no locales



Ecuaciones no locales





$\int_I J(y - x_0)dy =$Probabilidad de que la partícula salte de x_0 a la región I.

Problema a valores iniciales

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_I f(x)dx = \text{Cantidad de individuos en } I.$$

Problema a valores iniciales

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_I f(x)dx = \text{Cantidad de individuos en } I.$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \int J(x-y)\left[u(y,t) - u(x,t)\right] dy & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Problema a valores iniciales

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_I f(x)dx = \text{Cantidad de individuos en } I.$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \int J(x-y)\,[u(y,t) - u(x,t)]\,dy & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$u(x,t)$ la función que determina la cantidad de individuos en el instante de tiempo t.

Problema a valores iniciales

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \int J(x-y)\,[u(y,t) - u(x,t)]\,dy & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema a valores iniciales

$$\begin{cases} {u^r}_t(x,t) = \frac{1}{r^2}\int J_r(x-y)\,[u^r(y,t)-u^r(x,t)]\,dy & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u^r(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema a valores iniciales

$$\begin{cases} {u^r}_t(x,t) = \frac{1}{r^2} \int J_r(x-y)\,[u^r(y,t) - u^r(x,t)]\, dy & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u^r(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t(x,t) = \triangle v(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Problema a valores iniciales

$$\begin{cases} {u^r}_t(x,t) = \frac{1}{r^2} \int J_r(x-y)\,[u^r(y,t) - u^r(x,t)]\,dy & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u^r(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t(x,t) = \triangle v(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$u^r \underset{r\to 0}{\to} v?$$

Problema a valores iniciales

$$\begin{cases} {u^r}_t(x,t) = \frac{1}{r^2}\int J_r(x-y)\,[u^r(y,t)-u^r(x,t)]\,dy & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u^r(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t(x,t) = \triangle v(x,t) & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$u^r \underset{r\to 0}{\to} v?$$

Resultado

Si f y $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$ son integrables entonces

$$\lim_{r\to 0}\ \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,L]} |u^r(x,t)-v(x,t)| = 0$$

para todo $L>0$.

Fórmula de valor medio para temperaturas

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

- $v_t = \triangle v$ en $D \times (0, T]$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

- $v_t = \triangle v$ en $D \times (0, T]$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial (D \times (0, T]))$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

- $v_t = \triangle v$ en $D \times (0, T]$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial (D \times (0, T]))$
- $K_r(x, t) = \frac{1}{r^{n+2}} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$, $K(x, t) = \mathcal{X}_{E((0,0);1)}(x, t)\frac{|x|^2}{t^2}$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

- $v_t = \triangle v$ en $D \times (0, T]$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial (D \times (0, T]))$
- $K_r(x, t) = \frac{1}{r^{n+2}} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$, $K(x, t) = \mathcal{X}_{E((0,0);1)}(x, t)\frac{|x|^2}{t^2}$

Entonces
$$v(x_0, t_0) = \iint K_r(x_0 - y, t_0 - s)v(y, s)dyds.$$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

- $v_t = \triangle v$ en $D \times (0, T]$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial (D \times (0, T]))$
- $K_r(x, t) = \frac{1}{r^{n+2}} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$, $K(x, t) = \mathcal{X}_{E((0,0);1)}(x, t)\frac{|x|^2}{t^2}$

Entonces

$$v(x_0, t_0) = \iint K_r(x_0 - y, t_0 - s)v(y, s)dyds.$$

Además $v \in C^\infty(D \times (0, T])$.

Fórmula de valor medio para temperaturas

Resultado

- $v_t = \triangle v$ en $D \times (0, T]$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial (D \times (0, T]))$
- $K_r(x, t) = \frac{1}{r^{n+2}} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$, $K(x, t) = \mathcal{X}_{E((0,0);1)}(x, t)\frac{|x|^2}{t^2}$

Entonces

$$v(x_0, t_0) = \iint K_r(x_0 - y, t_0 - s)v(y, s)dyds.$$

Además $v \in C^\infty(D \times (0, T])$.

¿Vale la recíproca?

Fórmula de valor medio para temperaturas

Fórmula de valor medio para temperaturas

Recíproca

- $v \in C^\infty(D \times (0, T])$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Recíproca

- $v \in C^\infty(D \times (0, T])$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $\forall\ 0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial(D \times (0, T]))$,
  $K_r(x, t) = \frac{1}{r^2} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Recíproca

- $v \in C^\infty(D \times (0, T])$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $\forall\ 0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial(D \times (0, T]))$, $K_r(x, t) = \frac{1}{r^2} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

$$v(x_0, t_0) = \iint K_r(x_0 - y, t_0 - s) v(y, s) dyds$$

Fórmula de valor medio para temperaturas

Recíproca

- $v \in C^\infty(D \times (0, T])$
- $(x_0, t_0) \in D \times (0, T]$, $\forall\ 0 < r < d^p((x_0, t_0), \partial(D \times (0, T]))$,
  $K_r(x, t) = \frac{1}{r^2} K\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

$$v(x_0, t_0) = \iint K_r(x_0 - y, t_0 - s)v(y, s)dyds$$

Entonces $v_t(x_0, t_0) = \triangle v(x_0, t_0)$

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\iint J(x, t) dxdt = 1$

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$
- $J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\iint J(x, t) dxdt = 1$
- $J_r(x, t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

Sea $T_r : C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$T_r w(x, t) = \iint J_r(x - y, t - s) \left[w(y, s) - w(x, t)\right] dyds$$

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\iint J(x,t)dxdt = 1$
- $J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

Sea $T_r : C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$T_r w(x,t) = \iint J_r(x-y, t-s)\left[w(y,s) - w(x,t)\right] dyds$$

Entonces

$$T_r \underset{r\to 0}{\to} -C_1 \frac{\partial}{\partial t} + C_2 \triangle$$

Convergencia de operadores no locales al operador del calor

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $J \geq 0$
- sop$J$ compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\iint J(x,t)dxdt = 1$
- $J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

Sea $T_r : C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$T_r w(x,t) = \iint J_r(x-y, t-s)\left[w(y,s) - w(x,t)\right] dyds$$

Entonces

$$T_r \underset{r \to 0}{\to} -C_1 \frac{\partial}{\partial t} + C_2 \triangle$$

$C_1 = \iint J(y,s) s dyds$ y $C_2 = \frac{1}{2n} \iint J(y,z)|y|^2 dyds.$

CTRW (Continuous Time Random Walks)

CTRW (Continuous Time Random Walks)

$$\iint_{[t_1,t_2]\times E} J(x,t)\,dxdt = \text{Probabilidad de que la partícula salte del origen}$$

$$\text{a la región } E \text{ habiendo esperado un tiempo } t$$

$$\text{entre } t_1 \text{ y } t_2 \text{ para realizar el salto.}$$

$$\iint_{[t_1,t_2]\times E} J(x,t)dxdt = \text{Probabilidad de que la partícula salte del origen}$$

a la región E habiendo esperado un tiempo t

entre t_1 y t_2 para realizar el salto.

$$\int_E u(x,t)dx = \text{Probabilidad de que la partícula se encuentre}$$

en E en el instante de tiempo t.

CTRW (Continuous Time Random Walks)

$$\iint_{[t_1,t_2]\times E} J(x,t)dxdt = \text{Probabilidad de que la partícula salte del origen}$$

a la región E habiendo esperado un tiempo t

entre t_1 y t_2 para realizar el salto.

$$\int_E u(x,t)dx = \text{Probabilidad de que la partícula se encuentre}$$

en E en el instante de tiempo t.

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)dyds$$

CTRW (Continuous Time Random Walks)

$$\iint_{[t_1,t_2]\times E} J(x,t)dxdt = \text{Probabilidad de que la partícula salte del origen}$$

a la región E habiendo esperado un tiempo t

entre t_1 y t_2 para realizar el salto.

$$\int_E u(x,t)dx = \text{Probabilidad de que la partícula se encuentre}$$

en E en el instante de tiempo t.

$$u(x,t) = \iint_{s\leq t} J(x-y,t-s)u(y,s)dyds$$

CTRW (Continuous Time Random Walks)

$$\iint_{[t_1,t_2]\times E} J(x,t)dxdt = \text{Probabilidad de que la partícula salte del origen}$$

a la región E habiendo esperado un tiempo t

entre t_1 y t_2 para realizar el salto.

$$\int_E u(x,t)dx = \text{Probabilidad de que la partícula se encuentre}$$

en E en el instante de tiempo t.

$$u(x,t) = \iint_{s\leq t} J(x-y,t-s)u(y,s)dyds$$

- $\text{sop}J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$

Problema a valores iniciales para CTRW

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint \quad J(x-y, t-s)u(y,s)dyds$$

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint_{s \leq t} J(x-y, t-s) u(y,s) dy ds$$

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint_{s \le t} J(x-y, t-s) u(y,s) dyds$$

- $\mathrm{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint_{s\leq t} J(x-y, t-s)u(y,s)dyds$$

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint_{s \le t} J(x-y, t-s) u(y,s) dyds$$

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \ge 0\}$
- $J \ge 0$
- $\iint J(x,t) dxdt = 1$

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint_{s \leq t} J(x-y, t-s)u(y,s)dyds$$

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\iint J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto

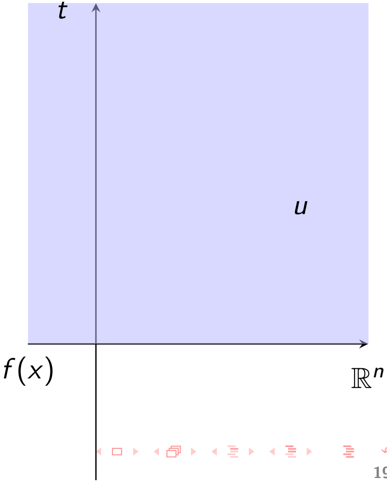
Problema a valores iniciales para CTRW

Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)\ dyds$$

Problema a valores iniciales para CTRW

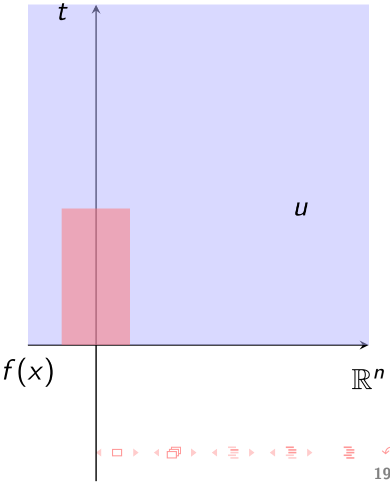
$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)\ dyds$$



Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)\ dyds$$

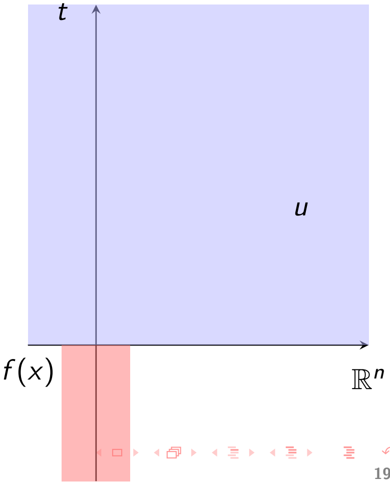
$\mathrm{sop} J(y,s) \subset B(0,R) \times [0,\alpha]$



Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)\ dyds$$

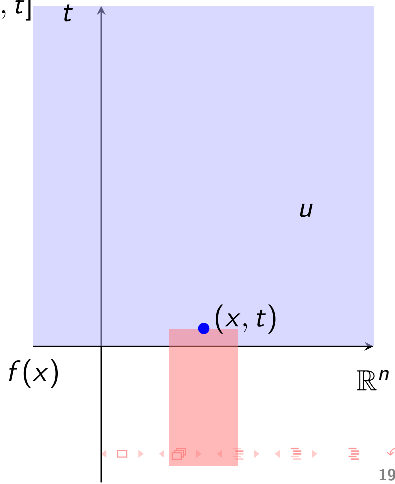
$\mathrm{sop} J(-y,-s) \subset B(0,R) \times [-\alpha, 0]$



Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)\ dyds$$

$\text{sop} J(x-y, t-s) \subset B(x,R) \times [t-\alpha, t]$

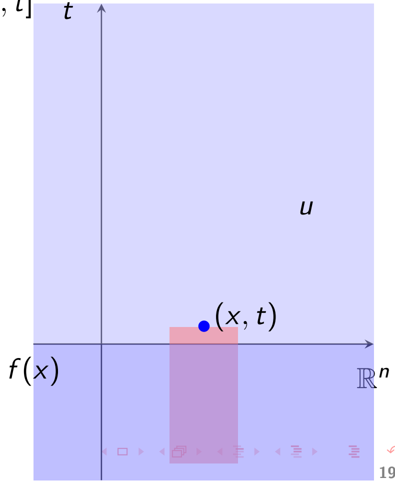


Problema a valores iniciales para CTRW

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)u(y,s)\ dyds$$

$\mathrm{sop} J(x-y, t-s) \subset B(x,R) \times [t-\alpha, t]$

$f(x)$ para $t < 0$



Problema a valores iniciales para CTRW

Problema a valores iniciales para CTRW

Problema

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Encontrar una función $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$P(J, f) \left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)\mathrm{e}(u)(y,s)dyds, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,\infty) \\ \mathrm{e}(u)(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & t < 0 \\ u(x,t) & t \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Existencia y unicidad de soluciones

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\text{sop}J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$

Existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\iint J(x,t) dx dt = 1$

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\iint J(x,t)dxdt = 1$
- J es de soporte compacto

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$
- J es de soporte compacto

Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\text{sop} J \subset \{(x, t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x, t) dxdt = 1$
- J es de soporte compacto

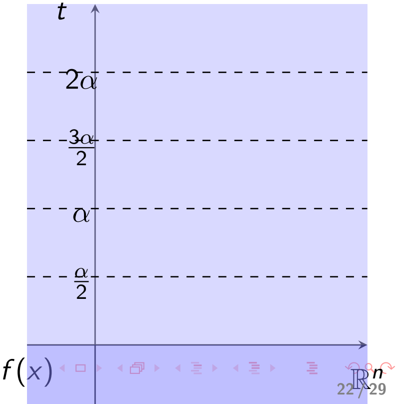
Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .Entonces existe una única función u en el espacio $(\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ que resuelve $P(J, f)$.

Existencia y unicidad de soluciones

Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$[0,\infty) = [0,\frac{\alpha}{2}] \cup [\frac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\frac{\alpha}{2}, i\frac{\alpha}{2}] \cup \ldots$

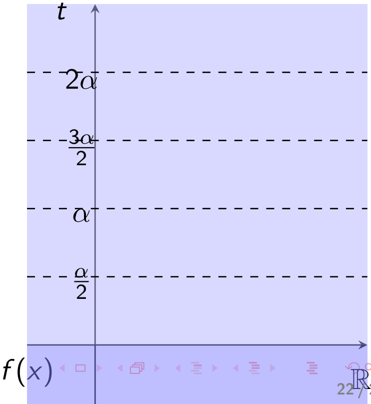


Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)\,dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0, \tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_1 = (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0, \tfrac{\alpha}{2}])$$



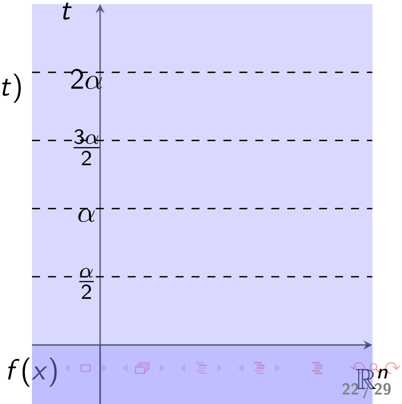
Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1 \right\}$$

$$[0, \infty) = [0, \tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_1 = (C \cap L^\infty)\,(\mathbb{R}^n \times [0, \tfrac{\alpha}{2}])$$

$$d_1(w, w') = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \frac{\alpha}{2}]} |w - w'|(x,t)$$



Existencia y unicidad de soluciones

Demostración:

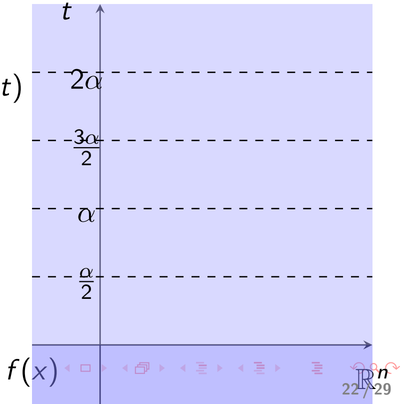
$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t) dx dt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0, \tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_1 = (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [0, \tfrac{\alpha}{2}])$$

$$d_1(w, w') = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \frac{\alpha}{2}]} |w - w'|(x,t)$$

$$T_1 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1$$



Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \le \gamma} J(x,t)\,dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

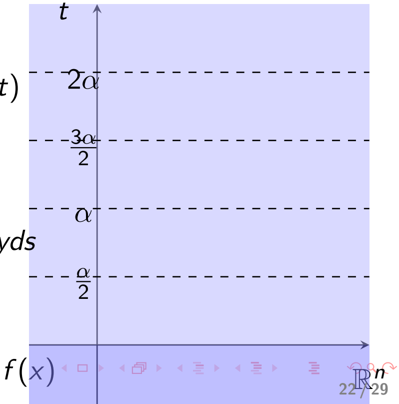
$$\mathcal{B}_1 = (C \cap L^\infty)\,(\mathbb{R}^n \times [0,\tfrac{\alpha}{2}])$$

$$d_1(w,w') = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\frac{\alpha}{2}]} |w-w'|(x,t)$$

$$T_1 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1$$

$$T_1 w(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(w)(y,s)\,dyds$$

$$\mathrm{e}(w)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t<0 \\ w(x,t) & t\in[0,\frac{\alpha}{2}] \end{cases}$$



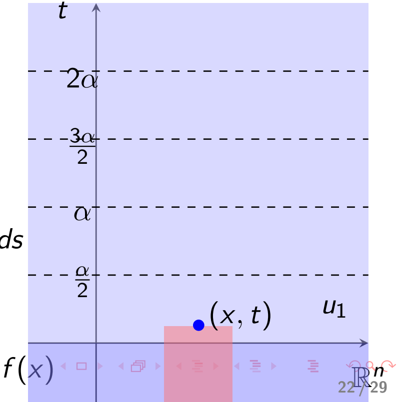
Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$u_1(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(u_1)(y,s)dyds$$

$$\mathrm{e}(u_1)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t<0 \\ u_1(x,t) & t\in[0,\frac{\alpha}{2}] \end{cases}$$

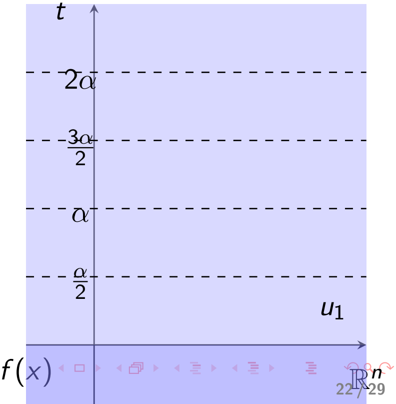


Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_2 = (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [\tfrac{\alpha}{2},\alpha])$$



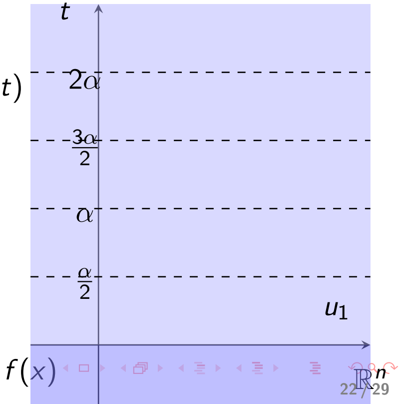
Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_2 = (C\cap L^\infty)\,(\mathbb{R}^n \times [\tfrac{\alpha}{2},\alpha])$$

$$d_2(w,w') = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]} |w-w'|(x,t)$$



Demostración:

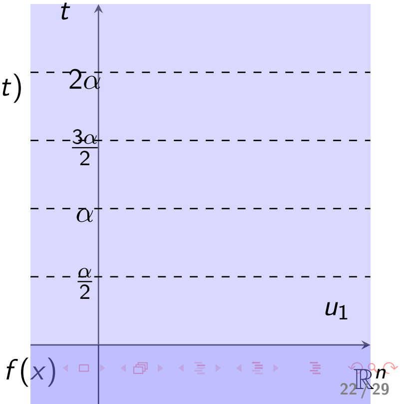
$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_2 = (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [\tfrac{\alpha}{2},\alpha])$$

$$d_2(w,w') = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]} |w-w'|(x,t)$$

$$T_2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$$



Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1 \right\}$$

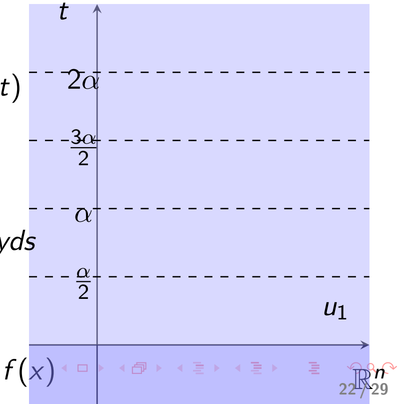
$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$\mathcal{B}_2 = (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [\tfrac{\alpha}{2},\alpha])$$

$$d_2(w,w') = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]} |w-w'|(x,t)$$

$$T_2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$$

$$T_2 w(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(w)(y,s)dyds$$



Existencia y unicidad de soluciones

Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0, \tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

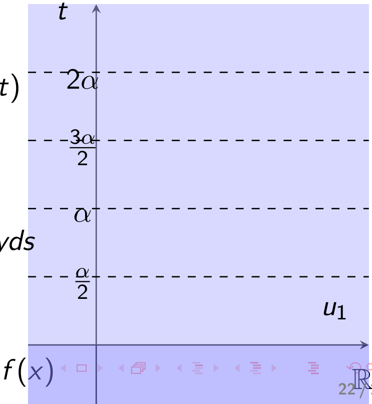
$$\mathcal{B}_2 = (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha])$$

$$d_2(w,w') = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]} |w - w'|(x,t)$$

$$T_2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$$

$$T_2 w(x,t) = \iint J(x-y, t-s)\mathrm{e}(w)(y,s)dyds$$

$$\mathrm{e}(w)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u_1(x,t) & t \in [0, \frac{\alpha}{2}] \\ w(x,t) & t \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha] \end{cases}$$



Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

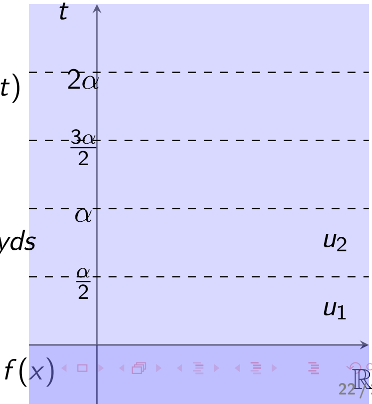
$$\mathcal{B}_2 = (C\cap L^\infty)(\mathbb{R}^n \times [\tfrac{\alpha}{2},\alpha])$$

$$d_2(w,w') = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[\frac{\alpha}{2},\alpha]} |w-w'|(x,t)$$

$$T_2 : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$$

$$T_2 w(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(w)(y,s)dyds$$

$$\mathrm{e}(w)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t<0 \\ u_1(x,t) & t\in[0,\frac{\alpha}{2}] \\ w(x,t) & t\in[\frac{\alpha}{2},\alpha] \end{cases}$$



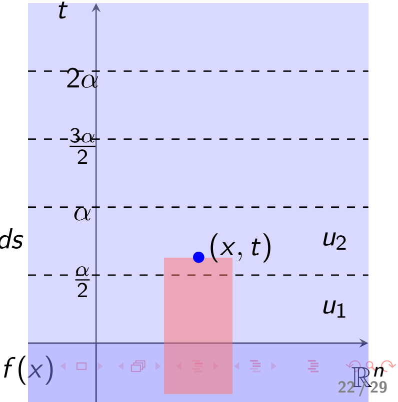
Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0, \tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$u_2(x,t) = \iint J(x-y, t-s)\mathrm{e}(u_2)(y,s)dyds$$

$$\mathrm{e}(u_2)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u_1(x,t) & t \in [0, \frac{\alpha}{2}] \\ u_2(x,t) & t \in [\frac{\alpha}{2}, \alpha] \end{cases}$$



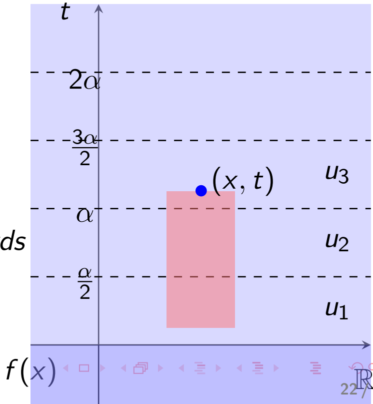
Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$u_3(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(u_3)(y,s)dyds$$

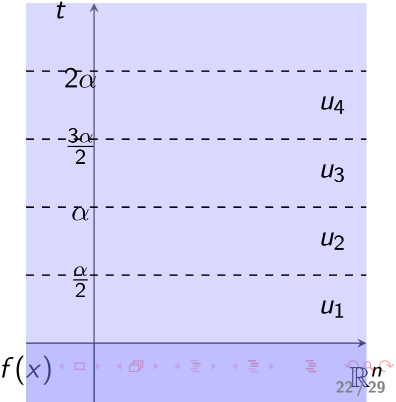
$$u_3(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) & t \in [0,\frac{\alpha}{2}] \\ u_2(x,t) & t \in [\frac{\alpha}{2},\alpha] \\ u_3(x,t) & t \in [\alpha,\frac{3\alpha}{2}] \end{cases}$$



Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$[0,\infty) = [0, \frac{\alpha}{2}] \cup [\frac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\frac{\alpha}{2}, i\frac{\alpha}{2}] \cup \ldots$

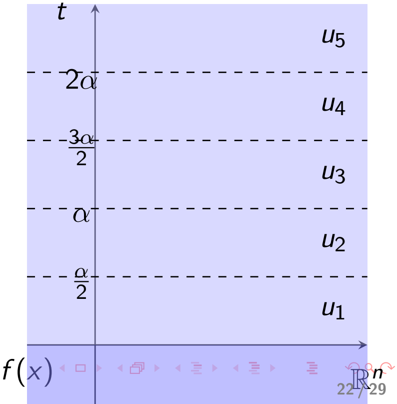


Existencia y unicidad de soluciones

Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

$[0,\infty) = [0,\frac{\alpha}{2}] \cup [\frac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\frac{\alpha}{2}, i\frac{\alpha}{2}] \cup \ldots$



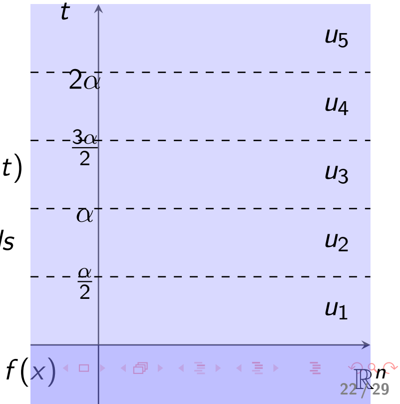
Demostración:

$$\alpha = \sup \left\{ \gamma : \iint_{t \leq \gamma} J(x,t)\,dxdt < 1 \right\}$$

$$[0,\infty) = [0, \tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2}, \alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x,t)\mathcal{X}_{[(i-1)\frac{\alpha}{2}, i\frac{\alpha}{2})}(t)$$

$$u(x,t) = \iint J(x-y, t-s)\mathrm{e}(u)(y,s)\,dyds$$



Demostración:

$$\alpha = \sup\left\{\gamma : \iint_{t\leq\gamma} J(x,t)dxdt < 1\right\}$$

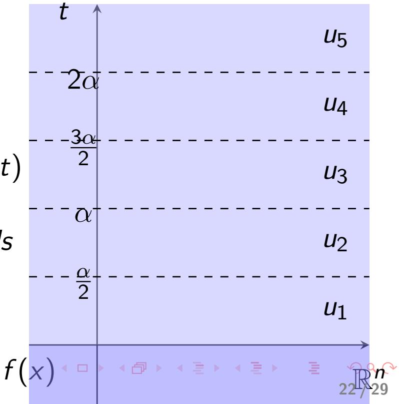
$$[0,\infty) = [0,\tfrac{\alpha}{2}] \cup [\tfrac{\alpha}{2},\alpha] \cup \ldots \cup [(i-1)\tfrac{\alpha}{2}, i\tfrac{\alpha}{2}] \cup \ldots$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x,t)\mathcal{X}_{[(i-1)\frac{\alpha}{2}, i\frac{\alpha}{2})}(t)$$

$$u(x,t) = \iint J(x-y,t-s)\mathrm{e}(u)(y,s)dyds$$

Si $t > \alpha$

$$u(x,t) = \iint J(x-y,t-s)u(y,s)dyds$$



Propiedades de las soluciones

Propiedades de las soluciones

Sean u solución de $P(J, f)$, v solución de $P(J, g)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

Propiedades de las soluciones

Sean u solución de $P(J, f)$, v solución de $P(J, g)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

- $u + cv$ resuelve $P(J, f + cg)$

Propiedades de las soluciones

Sean u solución de $P(J,f)$, v solución de $P(J,g)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

- $u + cv$ resuelve $P(J, f + cg)$
- $-\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \leq u \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$

Propiedades de las soluciones

Sean u solución de $P(J, f)$, v solución de $P(J, g)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

- $u + cv$ resuelve $P(J, f + cg)$
- $-\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \leq u \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$
- (Continuidad respecto del dato inicial)
  $$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)} |u - v|(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f - g|(x);$$

Propiedades de las soluciones

Sean u solución de $P(J,f)$, v solución de $P(J,g)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

- $u + cv$ resuelve $P(J, f + cg)$
- $-\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \le u \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$
- (Continuidad respecto del dato inicial)
  $\sup\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u - v|(x,t) \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f - g|(x)$;
- (Conservación de masa) Si f es integrable entonces

$$\int f(x)dx = \int u(x,t)dx$$

para todo $t \in [0,\infty)$;

Propiedades de las soluciones

Sean u solución de $P(J, f)$, v solución de $P(J, g)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

- $u + cv$ resuelve $P(J, f + cg)$
- $-\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \leq u \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$
- (Continuidad respecto del dato inicial) $\sup\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u - v|(x, t) \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f - g|(x)$;
- (Conservación de masa) Si f es integrable entonces

$$\int f(x)dx = \int u(x, t)dx$$

  para todo $t \in [0, \infty)$;
- (Principio de máximo para CTRW)

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u(x, t)| = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\alpha]} |u(x, t)|$$

Convergencia de soluciones

Sea u resuelve

$$P(J\ ,f)\begin{cases} u\ (x,t) & = \iint J\ (x-y,t-s)\ \mathrm{e}(u\ )(y,s) \qquad dyds \\ & \mathrm{e}(u\ )(x,t) = \begin{cases} f(x) & t<0 \\ u\ (x,t) & t\geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Convergencia de soluciones

Sea u resuelve

$$P(J\ , f) \begin{cases} 0 = \iint J\ (x-y, t-s)\left(\mathrm{e}(u\ )(y,s) - u\ (x,t)\right) dyds \\ \mathrm{e}(u\ )(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u\ (x,t) & t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Convergencia de soluciones

Sea u resuelve

$$P(J_r, f)\begin{cases} 0 = \iint J_r(x-y, t-s)\,(\mathrm{e}(u^r)(y,s) - u^r(x,t))\,dyds \\ \mathrm{e}(u^r)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u^r(x,t) & t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Convergencia de soluciones

Sea u resuelve

$$P(J_r, f) \begin{cases} 0 = \iint J_r(x-y, t-s)\,(\mathrm{e}(u^r)(y,s) - u^r(x,t))\, dyds \\ \mathrm{e}(u^r)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u^r(x,t) & t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Sea v que resuelve

$$\begin{cases} 0 = -v_t(x,t) + \triangle v(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Sea u resuelve

$$P(J_r, f)\begin{cases} 0 = \iint J_r(x-y, t-s)\,(\mathrm{e}(u^r)(y,s) - u^r(x,t))\,dyds \\ \mathrm{e}(u^r)(x,t) = \begin{cases} f(x) & t < 0 \\ u^r(x,t) & t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Sea v que resuelve

$$\begin{cases} 0 = -v_t(x,t) + \triangle v(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$u^r \underset{r\to 0}{\to} v?$$

Convergencia de soluciones

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea K un núcleo de la fórmula de valor medio para temperaturas. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uniformemente continua, u^r que resuelve $P(K_r, f)$ y v la temperatura que se obtiene convolucionando el núcleo de Weierstrass con f. Entonces

$$\lim_{r\to 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u^r(x,t) - v(x,t)| = 0$$

Si además $f \in C^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$ entonces

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u^r(x,t) - v(x,t)| \leq C[f]_\lambda r^\lambda$$

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea K un núcleo de la fórmula de valor medio para temperaturas. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uniformemente continua, u^r que resuelve $P(K_r, f)$ y v la temperatura que se obtiene convolucionando el núcleo de Weierstrass con f. Entonces

$$\lim_{r\to 0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u^r(x,t) - v(x,t)| = 0$$

Si además $f \in C^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$ entonces

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} |u^r(x,t) - v(x,t)| \leq C[f]_\lambda r^\lambda$$

$$K(x,t) = \frac{1}{4}\mathcal{X}_{E((0,0),1)}(x,t)\frac{|x|^2}{t^2}$$

Convergencia de soluciones

Convergencia de soluciones

Teorema

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- sop$J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- sop$J \subset \{(x, t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x, t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x, t) dx dt = 1$
- J de soporte compacto

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\mathrm{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\int\int J(x,t)tdxdt = \frac{1}{2n}\int\int J(x,t)|x|^2dxdt.$

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\iint J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\iint J(x,t)tdxdt = \frac{1}{2n} \iint J(x,t)|x|^2 dxdt.$

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Convergencia de soluciones

Teorema

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\iint J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto
- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$
- $\iint J(x,t)tdxdt = \frac{1}{2n} \iint J(x,t)|x|^2 dxdt.$

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.Si u^r resuelve $P(J_r, f)$ y v es la temperatura que se obtiene convolucionando el núcleo de Weierstrass con f entonces, para todo $L > 0$

$$\lim_{r \to 0} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,L]} |u^r(x,t) - v(x,t)| = 0$$

Un problema más general

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\mathrm{sop} J \subset \{(x, t) : t \geq 0\}$

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x, t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t) dxdt = 1$

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto.

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t) dxdt = 1$
- J de soporte compacto.

$$0 = \iint J(x-y, t-s) F(u(y,s) - u(x,t)) dyds \tag{1}$$

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t)dxdt = 1$
- J de soporte compacto.

$$0 = \int\int J(x-y, t-s)F(u(y,s) - u(x,t))dyds \qquad (1)$$

$F(z) = |z|^{p-2}z$, $p \geq 2$.

Un problema más general

Sea $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\text{sop} J \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$
- $J \geq 0$
- $\int\int J(x,t) dxdt = 1$
- J de soporte compacto.

$$0 = \iint J(x-y, t-s) F(u(y,s) - u(x,t)) dyds \tag{1}$$

$F(z) = |z|^{p-2} z, \ p \geq 2.$

Teorema

Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una única solución $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ de (1).

Un problema más general

Un problema más general

Si además

- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$.

Un problema más general

Si además

- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$.

$J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

Un problema más general

Si además

- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$.

$J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

$$0 = \iint J_r(x-y, t-s) F(\mathrm{e}(u^r(y,s)) - u^r(x,t)) dyds$$

Un problema más general

Si además

- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$.

$J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

$$0 = \iint J_r(x-y, t-s) F(\mathrm{e}(u^r(y,s)) - u^r(x,t)) dyds$$

$$u^{r_j} \to v, \quad j \to \infty$$

Un problema más general

Si además

- $J(\cdot, t)$ radial para todo $t \in \mathbb{R}$.

$J_r(x,t) = \frac{1}{r^{n+2}} J\left(\frac{x}{r}, \frac{t}{r^2}\right)$

$$0 = \iint J_r(x-y, t-s) F(\mathrm{e}(u^r(y,s)) - u^r(x,t)) dyds$$

$$u^{r_j} \to v, \quad j \to \infty$$

donde v es una solución viscosa de

$$C_1 |\nabla v|^{p-2} v_t = C_2 |\nabla v|^{p-2} \triangle_p v$$

$C_1 = \iint J(y,s) s y_1^{p-2} dyds$ y $C_2 = \iint J(y,s) y_1^p dyds$.

Gracias